Tableaux de combinatoire

Combien y a-t-il de façon de choisir k objets parmi n ?

	Sans remise	Avec remise
Sans ordre	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}$
Avec ordre	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Nombre de façon de placer k boules dans n urnes

Boules différentes ?	Urnes différentes ?	Les urnes peuvent-elles être vide ?	Formule
Oui	Oui	Oui	n^k
Oui	Oui	Non	$n! \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$
Non	Oui	Oui	$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$
Non	Oui	Non	$\binom{k-1}{n-1}$
Oui	Non	Oui	$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\}$
Oui	Non	Non	$\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$
Non	Non	Oui	$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$
Non	Non	Non	$p(k,n)$

Compter des fonctions $f : K \to N$

Élément de N	Élément de X	Aucune contrainte sur f	f est injective	f est surjective
Distingable	Distingable	n^k	$n^{\underline{k}}$	$n! \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$
Indistingable	Distingable	$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$
Distingable	Indistingable	$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$	$\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$
Indistingable	Indistingable	$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$	$p(k,n)$

Tableaux de combinatoire (Suite)

Combien de façon de distribuer k objets parmis n urnes

k objets **Condition sur la réception**	**n urnes distinctes**	**n urnes identiques**
Distinct Aucune condition L'ordre n'est pas importante	n^k	$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\}$
Distinct Au plus un objet	$n^{\underline{k}}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Distinct Au moins un objet L'ordre n'est pas importante	$n! \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$
Distinct Exactement un objet	$k!$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Distinct Aucune condition L'ordre est importante	$k! \left\langle \begin{matrix} k+1 \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle = n^{\overline{k}}$	$\sum_{i=1}^{n} \left[\begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right]$
Distinct L'ordre est importante Au moins un objet	$k! \binom{k-1}{n-1}$	$\left\lfloor \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\rfloor = \binom{k-1}{n-1} \frac{k!}{n!}$
Identique Aucune condition	$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$	$\sum_{i=1}^{n} p(k,i)$
Identique Au plus un objet	$\binom{n}{k}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$
Identique Au moins un objet	$\binom{k-1}{n-1}$	$p(k,n)$
Identique Exactement un objet	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

Coefficient binomiaux $\binom{n}{k}$

a. Nombre de façons de choisir k objets parmi n sans ordre et sans remise.

b. Formule explicite : $\binom{n}{k} = \dfrac{n^{\overline{k}}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

c. Formule de récurrence : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ avec $\binom{n}{1} = \binom{n}{n} = 1$.

d. Fonction génératrice : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

Coefficients multi-ensembles $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$

a. Nombre de façons de choisir k objet parmi n sans ordre et avec remise.

b. Formule explicite : $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \dfrac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

c. Formule de récurrence : $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ avec $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = n$, $\left\langle {1 \atop k} \right\rangle = 1$.

d. Fonction génératrice : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$.

Nombres de Stirling de première espèce $\left[{k \atop n} \right]$

a. Nombre de façon de placer k personnes autour de n tables rondes sans qu'aucune table ne soit laissé vide.

b. Formule de récurrence : $\left[{k \atop n} \right] = \left[{k-1 \atop n-1} \right] + (k-1)\left[{k-1 \atop n} \right]$ avec $\left[{k \atop 1} \right] = (k-1)!$, $\left[{k \atop k} \right] = 1$

c. Fonction génératrice : $x^{\overline{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$ et $x^{\underline{n}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \left[{n \atop k} \right] x^k$.

Nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ {k \atop n} \right\}$

a. Nombre de façons de placer k boules différentes dans n urnes identiques sans qu'aucune urne ne soit vide.

b. Formule explicite : $\left\{ {k \atop n} \right\} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$

c. Définition par récurrence : $\left\{ {k \atop n} \right\} = \left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} + n\left\{ {k-1 \atop n} \right\}$ avec $\left\{ {k \atop 1} \right\} = \left\{ {k \atop k} \right\} = 1$.

d. Fonction génératrice : $x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$ et $x^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\overline{k}}$.

Nombres de partitions d'un entier $p(k,n)$

a. Nombre de façons de placer k boules identiques dans n urnes identiques sans qu'aucune urnes ne soit vide.

b. Formule de récurrence : $p(k,n) = p(k-1,n-1) + p(k-n,n)$ avec $p(k,1) = p(k,k) = 1$.

c. Formule de sommation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(k,i) = p(k+n,n)$

Nombres de Lah $\left\lfloor {k \atop n} \right\rfloor$

a. Nombre de façon de partitionner un ensemble de k éléments en n sous-ensembles ordonnés non-vide.

b. Formule explicite : $\left\lfloor {k \atop n} \right\rfloor = \displaystyle\sum_{j} \left[{k \atop j} \right] \left\{ {j \atop n} \right\} = \binom{k-1}{n-1}\frac{k!}{n!}$.

c. Formule de récurrence $\left\lfloor {k \atop n} \right\rfloor = \left\lfloor {k-1 \atop n-1} \right\rfloor + (k+n-1)\left\lfloor {k-1 \atop n} \right\rfloor$ avec $\left\lfloor {k \atop 1} \right\rfloor = k!$ et $\left\lfloor {k \atop k} \right\rfloor = 1$.

d. Fonction génératrice : $x^{\overline{n}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\underline{k}}$ et $x^{\underline{n}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\overline{k}}$.

e. Autre relation : $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left[{n \atop j} \right] \left\{ {j \atop k} \right\}$.

Nombres de Bell B_n

a. Nombre de relation d'équivalence sur un ensemble de n éléments.

b. Formule explicite : $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$.

c. Formule de récurrence : $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ avec $B_0 = 1$.

Nombres de Catalan C_n

a. Nombre de façons de trianguler un polygone à $n+2$ côtés.

b. Formule de récurrence : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$ avec $C_0 = 1$.

c. Formule explicite : $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Nombres de Ramsey $R(r,s)$

a. Nombre minimal de personnes nécessaire pour être certain d'avoir soit r personnes qui se connaissent mutuellement ou s personnes qui ne se connaissent pas.

b. $R(3,3) = 6$.

Nicolas Bouffard
1 mars 2018

Coefficient binomial

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Coefficient multi-ensembles

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378

Nombres de Stirling de première espèce

k\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

Nombres de Stirling de deuxième espèce

k\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Nombres de partition d'un entier

k\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1		1									
2		1	1								
3		1	1	1							
4		1	2	1	1						
5		1	2	2	1	1					
6		1	3	3	2	1	1				
7		1	3	4	3	2	1	1			
8		1	4	5	5	3	2	1	1		
9		1	4	7	6	5	3	2	1	1	
10		1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

Nombres de Lah

k\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1		1									
2		2	1								
3		6	6	1							
4		24	36	12	1						
5		120	240	120	20	1					
6		720	1800	1200	300	30	1				
7		5040	15120	12600	4200	630	42	1			
8		40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1		
9		362880	1451520	1693440	846720	211680	28224	2016	72	1	
10		3628800	16329600	21772800	12700800	3810240	635040	60480	3240	90	1

n	Bn	Cn	Dn	Fn	Mn	p(n)
0	1	1	1	0		1
1	1	1	0	1	0	1
2	2	2	1	1	0	2
3	5	5	2	2	2	3
4	15	14	9	3	12	5
5	52	42	44	5	312	7
6	203	132	265	8	9600	11
7	877	429	1854	13	416880	15
8	4140	1430	14833	21	23879520	22
9	21147	4862	133496	34	1749363840	30
10	115975	16796	1334961	55		42